

Análisis Numérico, Geométrico y Analítico de los Problemas del Círculo y de la Esfera Contráctil.

*Douglas B. Meade**

e-mail: meade@math.sc.edu
Department of Mathematics
University of South Carolina
Columbia, SC 29208 USA

Wei-Chi Yang

e-mail: wyang@radford.edu
Department of Mathematics and Statistics
Radford University
Radford, VA 24142 USA

Traslated by:

Mauricio Herrera, Viviana Schiappacasse, Rubén Preiss
Instituto de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales, Santiago, Chile

31 Enero 2007

Resumen

El Problema del Círculo Contráctil es un ejemplo de un problema geométrico fácil de establecer y visualmente atractivo, sin embargo, su solución es un desafío a resolver. Se utiliza una combinación de geometría y análisis para resolver completamente el problema general en el plano, y su extensión a tres dimensiones: el Problema de la Esfera Contráctil. Demostramos el por qué los intentos numéricos tradicionales de responder incluso al problema más simple son vanos. El problema original fue generalizado y basado en evidencia visual producida por un software geométrico dinámico. Fue sólo con esta idea que fue posible utilizar herramientas de computación simbólica para aunar las demostraciones completas. Todo material suplementario que acompaña este artículo puede ser hallado en los siguientes sitios:

<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/>

<http://www.radford.edu/~scorwin/eJMT/Content/Papers/v1n1p4>.

1 Introducción

El siguiente problema aparece, con una notación levemente diferente, como ejercicio en [Stewart, 2007, p.45, ejercicio 56].

Problema 1 (El Problema Original del Círculo Contráctil)

La figura 1 muestra un círculo fijo C con ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y un círculo contráctil C_r de radio r y centro en el origen. P es el punto $(0,r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos, y R es el punto de intersección del segmento PQ y el eje- x . ¿Qué le ocurre a R a medida que C_r se contrae, esto es, a medida que $r \rightarrow 0^+$?

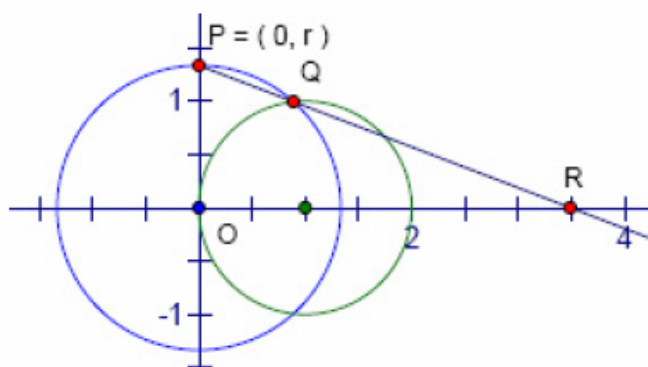


Figura 1: El Problema Original del Círculo Contráctil. ¿Qué le ocurre a R a medida que $r \rightarrow 0^+$? (Gráfica producida con [GSketchpad], [1].)

Es claro que la pendiente del segmento PR es negativa e incrementándose hacia cero a medida que el punto P se aproxima al origen. Una conjetura razonable es que el punto R diverge hacia el infinito. De hecho, en la sección 2, se demostrará que el límite existe, y es 4. La discusión en la Sección 2 está basada en una demostración analítica de este hecho. También incluye la primera indicación de algunas de las características analíticas sutiles que serán de gran importancia en el resto del artículo.

El Problema Generalizado del Círculo Contráctil es obtenido al reemplazar el círculo fijo C con una curva general fija (también llamada C). Una demostración geométrica aparece en [Kreezner, 1995] y una demostración analítica ha sido dada recientemente en [Yang, 2006]. Independientemente de las técnicas empleadas en la demostración, la idea clave es que el comportamiento de este límite está completamente determinado por el círculo osculador de la curva fijada en el origen.

Las discusiones en las secciones 2 y 3 conducen de manera natural a los correspondientes problemas en tres dimensiones. El Problema Original de la Esfera Contráctil es obtenido en la Sección 4, al reemplazar C por S, la esfera unitaria fija centrada en $(1,0,0)$, y reemplazando C_r por S_r , una esfera contráctil con radio r y centro en el origen.

El Problema Generalizado de la Esfera Contráctil es obtenido al reemplazar la esfera fija S por cualquier superficie fija en \mathbb{R}^3 . Una caracterización completa del límite en esos casos está dada en la sección 5. No es sorprendente que este resultado dependa críticamente de un círculo osculador de la superficie fija en el origen.

Tanto en dos como en tres dimensiones, los resultados están confirmados para diversas geometrías especiales. También, cada resultado general es reestablecido en una forma que no hace referencia alguna a un sistema coordenado global.

La sección 6 vuelve a revisar los resultados analíticos claves involucrados en las demostraciones del Teorema 2 y del Teorema 5. Esta discusión incluye ejemplos específicos que ilustran las dificultades involucradas al intentar ganar internalización en esos problemas usando solamente evidencia numérica o gráfica. A través del artículo aparecen referencias a materiales electrónicos accesibles en Internet relacionados con estos problemas. Todos estos materiales están reunidos en una única página web en la URL: <http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/>.

2 El Problema Original del Círculo Contráctil

El problema original tal como aparece en [Stewart, 2007] puede ser resuelto por la fuerza bruta. La ecuación de C_r es $x^2 + y^2 = r^2$ y el punto Q donde C y C_r se intersectan en el primer

cuadrante se halla en $\left(\frac{r^2}{2}, \frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}\right)$. La coordenada-x del punto R donde la recta PQ intersecta

el eje x, es $x_R = \frac{-r}{m}$ donde $m = \frac{r - \frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}}{0 - \frac{r^2}{2}}$.

Así $x_R = \frac{-r}{m} = \frac{r^2}{2 - \sqrt{4-r^2}}$

r	d=12	d=10	d=8	d=6	d=4
1.0	3.732	3.732	3.732	3.732	3.731
0.5	3.936	3.936	3.936	3.936	3.906
0.1	3.997	3.997	3.997	4.000	3.333
0.05	3.999	3.999	3.999	3.968	2.500
0.01	3.999	4.000	4.000	3.333	NaN
0.005	3.999	4.000	3.968	2.500	NaN
0.001	4.000	4.000	3.333	NaN	NaN
0.0005	4.000	3.968	2.500	NaN	NaN
0.0001	4.000	3.333	NaN	NaN	NaN
0.00005	3.968	2.500	NaN	NaN	NaN
0.00001	3.333	NaN	NaN	NaN	NaN

Tabla 1: Aproximación numérica a x_R para valores moderadamente pequeños de r y diferentes números de dígitos significativos. [Cálculos realizados con [Maple]. [2]]

A medida que el círculo C_r se contrae hacia el punto en el origen, la expresión para x_R es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

La forma indeterminada de este límite interfiere con el intento de evaluarlo numéricamente. La Tabla 1 muestra valores numéricos de x_R , para valores moderadamente pequeños de r, cuando la aritmética del punto flotante es realizada usando d dígitos significativos.¹ Mientras el valor preciso de r disminuye donde las soluciones registradas comienzan a deteriorarse, a medida que el número de dígitos usados significativos aumenta, es claro que este comportamiento será observado para cualquier número finito fijo de dígitos significativos.²

¹ Por defecto Maple utiliza 10 cifras significativas en todos los cálculos de puntos flotantes; muchas calculadoras TI utilizan 12 cifras significativas.

² Esta es también una buena ilustración que al utilizar d cifras significativas en todos los cálculos no garantiza que el valor computado sea exacto para d cifras.

Los valores en la Tabla 1 sugieren que el límite, debe existir y pareciera ser el valor 4. El que dicho valor del límite sea correcto, se verifica de inmediato con una aplicación de la Regla de L'Hopital:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} x_R = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2}{2 - \sqrt{4 - r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r}{\frac{r}{\sqrt{4 - r^2}}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} 2\sqrt{4 - r^2} = 4.$$

donde la regla de L'Hopital es aplicada una vez cuando el límite es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

El primer paso para resolver el Problema Original Del Círculo Contráctil, es tener una comprensión visual de la construcción del punto R. Si bien esta visualización puede ser lograda a través de un CAS como Maple [Maple] o *Mathematica* [Mathematica], la construcción es mucho más simple y la animación resultante es mejor al utilizar una herramienta geométrica dinámica tal como Cabri 3D [Cabri3D], El Geómetra Sketchpad [GSketchpad], y Expresiones Geométricas [GExpressions].

3 EL Problema Generalizado Del Círculo Contráctil

Considere la extensión siguiente del Problema Original Del Círculo Contráctil:

Problema 2 (El Problema Generalizado Del Círculo Contráctil) *Sea C una curva fija y sea C_r el círculo con centro en el origen y radio r. P es el punto (0,r), Q es el punto superior de la intersección entre C y C_r , y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje-x. ¿Qué le ocurre a R a medida que C_r se contrae, esto es., cuando $r \rightarrow 0^+$?*

Una primera observación es que si C no incluye el punto en el origen, entonces los puntos R no están definidos para todos los valores de r en una vecindad unilateral de 0.

Una fórmula general explícita para las coordenadas de R no estará disponible para su lectura, excepto en casos especiales. Esto significa que ninguna de las perspectivas usadas para analizar el Problema Generalizado del Círculo Contráctil (de cálculo y numéricas) serán de utilidad para el caso general.

Un paso importante para el análisis del Problema Generalizado Del Círculo Contráctil es considerar el caso cuando la curva fija es cualquier círculo que pasa a través del origen.

Lema 1 *Sea C el círculo con centro (a,b) que incluye el origen: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$. Sean C_r , P, Q, y R definidos como en el Problema Generalizado Del Círculo Contráctil. Entonces:*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} R = \begin{cases} (4\rho, 0) & \text{si } b = 0 \\ (0, 0) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Demostración.³

La derivación completa paso-a-paso de este resultado ha sido confeccionado en un hoja de trabajo con Maple [3]. Los detalles más destacados de ese desarrollo están dados aquí:

Para estos círculos es aun posible obtener fórmulas explícitas para los puntos Q y R:

³ Una demostración geométrica pura del lema 1 ha sido sugerida a los autores por Tom Banchoff. Esta demostración será el tema de otro artículo, próximo a ser escrito.

$$Q = \left(\frac{r ar - b \operatorname{sgn}(a) \sqrt{4(a^2 + b^2) - r^2}}{2(a^2 + b^2)}, \frac{r br + |a| \sqrt{4(a^2 + b^2) - r^2}}{2(a^2 + b^2)} \right)$$

$$R = \left(\frac{r (ra - b \operatorname{sgn}(a) \sqrt{4(a^2 + b^2) - r^2})}{2(a^2 + b^2) - br - |a| \sqrt{4(a^2 + b^2) - r^2}}, 0 \right)$$

donde sgn es la función “signo” ($\operatorname{sgn}(x)=1$, si $x > 0$, $\operatorname{sgn}(0)=0$, y $\operatorname{sgn}(x)=-1$ si $x < 0$).

Para $b = 0$, la expresión para la x-componente de R es $x_R = \frac{ar^2}{2a^2 - |a| \sqrt{4a^2 - r^2}}$. Un cálculo directo muestra que $x_R \rightarrow 4a$ cuando $r \rightarrow 0^+$ ■

Sea C el círculo osculador de C en el origen. Esto significa que C intersecta a C en el origen, es tangente a C en el origen, y tiene la misma curvatura que C en el origen. Otra forma de expresar esto es decir que C y C tienen un contacto 3-puntos en el origen.

Supongamos que C tiene curvatura k en el origen. El círculo osculador C será el círculo con radio $\rho = \frac{1}{k}$, cuyo centro (a,b) está sobre la recta normal a C en el origen. Así, $a^2 + b^2 = \rho^2$.

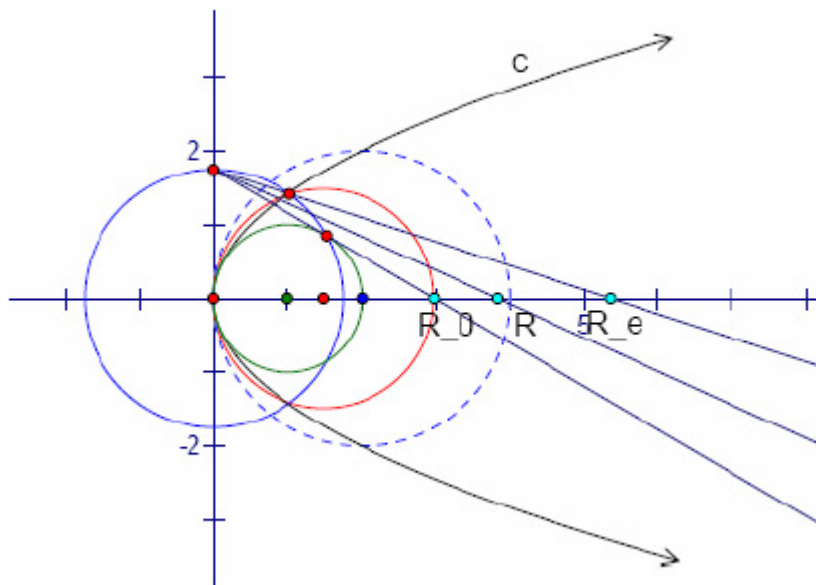


Figura 2: Construcción de la demostración del Teorema 2. (Gráfica obtenida con [GSketchpad] , [4] .)

Teorema 2 Sea C una curva en el plano que incluye al origen y es continuamente diferenciable dos veces en el origen. Se definen C_r , P , Q , y R tal como en El Problema Generalizado Del Círculo Contráctil. Si la curvatura en el origen, k es positiva, el círculo osculador de C en el origen tiene radio $\rho = \frac{1}{k}$ y centro (a,b) donde $a^2 + b^2 = \rho^2$. Entonces,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} R = \begin{cases} (4\rho, 0) & \text{si } b = 0 \\ (0, 0) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Demostración. Esta demostración está basada en una hallada en [Kreczner, 1995].

El círculo osculador de C en el origen, C_0 , tiene radio $\rho = \frac{1}{k}$ y centro (a,b) donde $a^2 + b^2 = \rho^2$.

Caso 1: Supongamos $b = 0$ y $a = \rho$. Esto significa que, cerca del origen, la gráfica de C es cóncava hacia abajo y en el primer cuadrante. Sea C_ε el círculo con radio $\rho + \frac{\varepsilon}{4}$ y centro $(\rho + \frac{\varepsilon}{4}, 0)$. Note que $C_0 = C$, el círculo osculador de C en el origen. Definamos Q_ε como la intersección de C_r y C_ε en el primer cuadrante y R_ε como la intersección de la recta que pasa por P y Q_ε con el eje- x (positivo). Aun cuando $C_0 = C$, Q_0 y R_0 no coinciden necesariamente con Q y R , respectivamente.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para $r > 0$ pero suficientemente cercano a 0, los puntos R_0 , R , y R_ε aparecen en orden desde la izquierda hacia la derecha en el eje- x positivo (ver Figura 2). Por el Lema 1, $R_0 \rightarrow (4\rho, 0)$ y $R_\varepsilon \rightarrow (4\rho + \varepsilon, 0)$ cuando $r \rightarrow 0^+$, para todo $\varepsilon > 0$.

Ahora, supongamos que $\varepsilon \rightarrow 0^+$, y concluimos que $\lim_{r \rightarrow 0^+} R = (4\rho, 0)$.

Caso 2: Cuando $b = 0$ y $a = -\rho$, la gráfica de C es cóncava hacia abajo y en el segundo cuadrante. La reflexión a lo largo del eje y , transforma el problema al Caso 1.

Caso 3: Un análisis similar puede ser utilizado cuando $b \neq 0$. Aquí la diferencia radica en que ambos valores, R_0 y R_ε se aproximan a $(0,0)$ cuando $r \rightarrow 0^+$. Este caso incluye también las situaciones donde $k = 0$. ■

3.1 Otras Geometrías

3.2

El Teorema 2 puede ser verificado para otras curvas además del círculo. La Tabla 2 muestra los resultados para tres clases generales de curvas. La elipse es una generalización natural del círculo. Las rectas que pasan por el origen tienen $k = 0$ y por lo tanto no existe un círculo osculador. La parábola es el ejemplo considerado en [Kreczner, 1995], para el cual Mathematica, fue incapaz de evaluar correctamente.. Los detalles para cada caso se proporcionan en hojas de trabajo suplementarias de Maple..

Curva	C	κ	$\lim_{r \rightarrow 0^+} R$	Referencia
elipse	$(\frac{x-a}{a})^2 + y^2 = 1$	a	$\frac{4}{a}$	[5]
recta	$y = ax$	0	0	[6]
parabola	$y^2 = ax$	$\frac{2}{a}$	$2a$	[7]

Tabla 2: Resumen de resultados para curvas fijas no circulares. Cada hoja de trabajo contiene la derivación completa para la geometría específica, incluyendo una animación del proceso al límite.

3.2 Versión libre-de-Coordenadas

La solución al Problema Generalizado Del Círculo Contráctil puede ser reformulada sin mencionar un sistema coordenado global. El análisis utilizado en la demostración del Teorema 2 no depende de una elección particular del sistema coordenado. Esta no es la única forma de demostrarlo. Dejando de lado algunas de las representaciones simbólicas complicadas para Q y R, las ideas esenciales son todas geométricas. Para enfatizar la naturaleza geométrica del problema, y su solución, volveremos a exponer el resultado sin uso alguno de coordenadas.

Teorema 3 Sea O un punto de la curva C en el plano donde existe el círculo osculador a C en O. Sean T y N respectivamente, los vectores unitarios tangente y normal a C en O. Sea k la curvatura de C en O. (N está orientado de modo que $O + \frac{1}{k}N$ es el centro del círculo osculador a C en O.)

Para cualquier valor $r > 0$, definamos:

- C_r como el círculo de radio r centrado en O.
- $P = O + rT$, el punto en el máximo de C_r .
- Q, la intersección entre C y C_r , y
- R el punto de la recta que pasa por P y Q, tal que \overline{OR} es paralelo a N.

Entonces, a medida que r decrece a 0, R converge al punto $R_0 = O + \frac{4}{k}N$.

Esta formulación de la solución al Problema Generalizado Del Círculo Contráctil se utilizará en el análisis del problema tridimensional correspondiente, el Problema De La Esfera Contráctil.

4 El Problema Más Simple De La Esfera Contráctil.

El éxito obtenido con los problemas bidimensionales despierta interés en los correspondientes problemas tridimensionales.

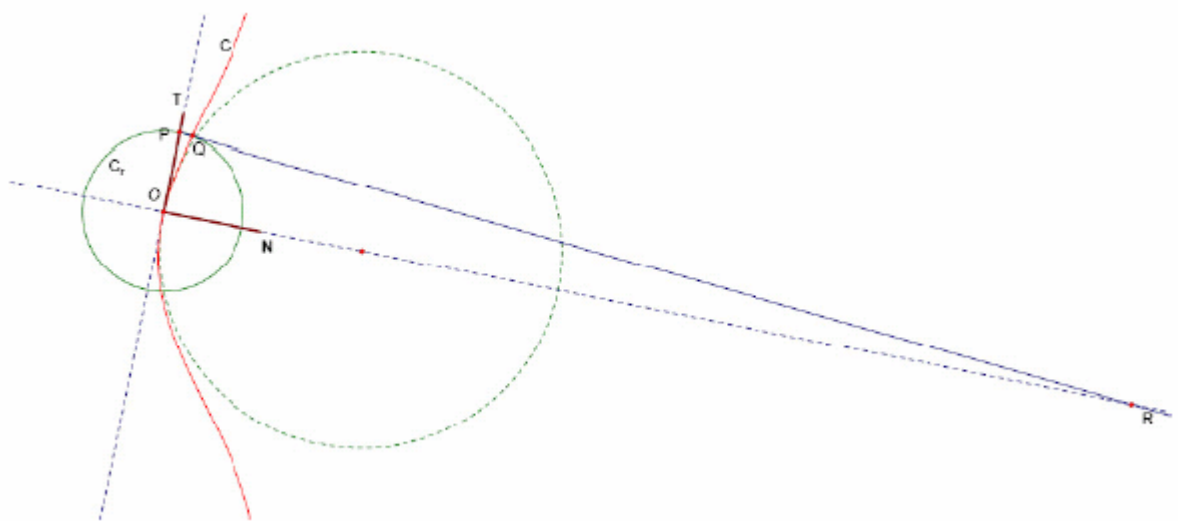


Figura 3: Geometría libre de coordenadas del Teorema 3. (Gráfica obtenida con [GSketchpad], [8].)

Problema 3 (El Problema Más Simple De La Esfera Contráctil). Sea S la esfera unitaria centrada en $(0,1,0)$ y sea S_r la esfera centrada en el origen con radio r . Sea P el punto en lo máximo de S_r , $(0,0,r)$, sea Q la intersección de las esferas S y S_r , y sea R la proyección de Q sobre el plano x - y . ¿Cuál es el $\lim_{r \rightarrow 0^+} R$?

La intersección, Q , entre S_r y S , es un círculo. De hecho es el círculo perpendicular al eje- y con radio $\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}$ y centro $\left(0, \frac{r^2}{2}, 0\right)$. La proyección del punto $(0,0,r)$ a través del punto más alto en Q al plano $z = 0$ corresponde al Problema Original Del Círculo Contráctil, discutido en la Sección 2; este punto debe converger a $(4,0,0)$ a medida que $r \rightarrow 0^+$.

La proyección de P a través de cada punto de Q sobre el plano $z = 0$ forma una nueva curva R . En este caso los puntos en R satisfacen $x^2 + (y-2)^2 = 4-r^2$, el círculo en el plano $z = 0$, con centro $(0,2,0)$, y con radio $\sqrt{4-r^2}$. A medida que S_r se contrae a un punto único en el origen, estas curvas convergen al círculo $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

El análisis del Problema Más Simple De La Esfera Contráctil es más sutil de lo que pareciera a primera vista. Para ilustrarlo, para cada punto (x,y,z) definimos el ángulo $\vartheta = \arctan\left(\frac{x}{z}\right) \in (-\pi, \pi]$ con los signos de x y z utilizados para determinar el cuadrante apropiado para dicho ángulo. Notemos que ϑ es el ángulo construido con el eje- z positivo medido en el plano paralelo al plano $y = 0$. Sea $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ dado. Consideremos la sección transversal de la construcción con S y S_r , obtenida al cortar con el plano que forma un ángulo ϑ con el eje- z positivo. Notemos que el eje- y está contenido en esta sección transversal, por lo tanto los centros de ambas, S y S_r , están incluidos. El corte de S_r es un círculo con radio r centrado en el origen. El corte de S es un círculo fijo con el mismo centro y radio que S . Su intersección es un punto en Q , y su proyección sobre el plano $z = 0$ desde $P = (0,0,r)$, es un punto en R ; denotemos estos dos puntos como Q_ϑ y R_ϑ respectivamente. Cuando $\vartheta=0$ (y $\vartheta=\pi$) el punto P también está en el plano. Este es precisamente el arreglo para el Teorema Del Círculo Contráctil; en este caso el punto R_ϑ se aproxima al punto $\left(\frac{4}{k}, 0\right)$ a medida que $r \rightarrow 0^+$. Para todos los demás valores de ϑ , el punto P no está en el plano. Esto es similar al Lema 1 cuando $b \neq 0$. La observación general de esto es que si los puntos Q_ϑ y R_ϑ , no están en el plano que incluye los centros de S y S_r y el punto P , entonces estos puntos se aproximan al origen a medida que S_r se contrae al punto en el origen.

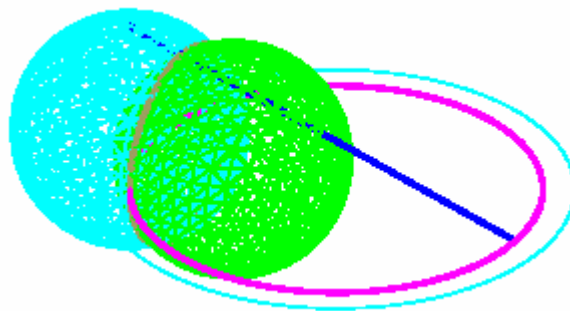


Figura 4: La Forma Más Simple Del Problema De La Esfera Contráctil (Gráfica creada con [Maple], [9].)

Esta observación será corroborada en la sección siguiente durante la demostración de la solución del Problema Generalizado De La Esfera Contráctil.

5 El Problema Generalizado De La Esfera Contráctil

Ahora estamos preparados para extender los resultados del Problema De La Esfera Contráctil En Su Forma Más Simple a superficies S que no son esferas.

Problema 4 (El Problema Generalizado De La Esfera Contráctil)

Sea S una superficie fija y sea S_r la esfera con centro en el origen y radio r . P es el punto $(0,0,r)$, Q es la curva de intersección entre S y S_r , y R es la proyección desde P a través de Q sobre el plano $z = 0$. Describa el $\lim_{r \rightarrow 0^+} R$.

Las ideas generales utilizadas en El Problema Generalizado Del Círculo Contráctil pueden ser extendidas a tres dimensiones. Esto sugiere la aproximación de la superficie S con una esfera apropiada.

Lema 4 Sea S la esfera centrada en $(0,a,b)$ que incluye el origen:

$$x^2 + (y - a)^2 + (z - b)^2 = a^2 + b^2.$$

Sean S_r , P , Q , y R definidos como en El Problema Generalizado De La Esfera Contráctil. Entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} R = \begin{cases} x^2 + (y - 2a)^2 = 4a^2 & \text{Si } a \neq 0 \text{ y } b = 0 \\ (0, 0) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Antes de demostrar este resultado, tomemos un minuto para notar cómo el Lema 4 es una extensión natural del Lema 1. En ambos casos, los casos interesantes son cuando (i) el vector radial desde el centro del objeto fijo al origen y el vector desde el origen hacia el punto P son perpendiculares y (ii) el punto P y los centros de S_r y S son coplanares. En estos casos $\lim_{r \rightarrow 0^+} R$ es el conjunto de puntos x que satisface $\|x - a\| = 2\|a\|$ donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana apropiada.

Demostración ⁴

La intersección, Q , de S y S_r es un círculo cuyo centro está a lo largo de la recta a través del origen, O , y el centro de S . A medida que $r \rightarrow 0^+$, el centro de Q se aproxima al origen y el radio de Q se aproxima a 0. La curva R es la proyección a través de P de Q sobre el plano $z = 0$. En general, esta curva también converge a un punto único en el origen.

Hay una excepción: cuando el vector desde O al centro de S es perpendicular a OP , es decir, con $b = 0$. En este caso es nuevamente posible obtener una fórmula explícita para las curvas Q y R .

Aunque las formas paramétricas no serán convenientes al momento de evaluar el límite, a medida que $r \rightarrow 0^+$, estas representaciones pueden ser útiles en la identificación de propiedades generales de R .

⁴ Justificación adicional de los pasos en esta demostración se proporcionan en una hoja de trabajo suplementaria de Maple [9].

Sea $\vartheta = \arctan\left(\frac{x}{z}\right) \in (-\pi, \pi]$, el ángulo medido paralelo al plano $y = 0$, que un punto (x, y, z) hace con el eje- z positivo (tal como está descrito en la Sección 4). No requiere mucho esfuerzo ver que Q es el círculo en el plano $y = \frac{r^2}{2}$ con centro $\left(0, \frac{r^2}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{r}{2}\sqrt{4a^2 - r^2}$. Una representación paramétrica de Q es:

$$Q : x = \frac{r}{2}\sqrt{4a^2 - r^2} \sin \theta, \quad y = \frac{r^2}{2}, \quad z = \frac{r}{2}\sqrt{4a^2 - r^2} \cos \theta, \quad \text{para } -\pi < \theta \leq \pi$$

Al trabajar con esta representación paramétrica, encontramos una representación paramétrica para R :

$$R : x = \frac{r\sqrt{4a^2 - r^2} \sin \theta}{2a - \sqrt{4a^2 - r^2} \cos \theta}, \quad y = \frac{r^2}{2a - \sqrt{4a^2 - r^2} \cos \theta}, \quad z = 0, \quad \text{para } -\pi < \theta \leq \pi$$

La evidencia visual sugiere que R es también un círculo. Con esta consideración se puede demostrar en forma directa que R es el círculo en el plano $z = 0$, con centro $(0, 2a, 0)$ y radio $\sqrt{4a^2 - r^2}$.

Es claro ahora que cuando $r \rightarrow 0^+$, R converge al círculo en el plano $z = 0$ con centro $(0, 2a, 0)$ y radio $2|a|$: $x^2 + (y - 2a)^2 = 4a^2$. ■

Ahora estamos preparados para formular y probar el resultado general para superficies fijas no esféricas.

Teorema 5 *Sea S una superficie que incluye al origen y es continuamente diferenciable dos veces en el origen. Definamos S_r , P , Q , y R tal como en El Problema Generalizado De La Esfera Contráctil. Denotemos por $S|_{x=0}$, la restricción de S al plano $x = 0$. supongamos que el círculo osculador a $S|_{x=0}$ en el origen tiene radio ρ y centro $(0, a, b)$. Entonces, con $a^2 + b^2 = \rho^2$,*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} R = \begin{cases} x^2 + (y - 2\rho)^2 = 4\rho^2 & \text{si } b = 0 \\ (0, 0) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Demostración. La demostración es una adaptación a tres dimensiones de la demostración del teorema 2. Nos preocuparemos solamente del caso cuando $b = 0$ y $a = \rho \neq 0$. Sea S_ε la esfera centrada en $\left(0, \rho + \frac{\varepsilon}{2}, 0\right)$ con radio $\rho + \frac{\varepsilon}{2}$. Notemos que $S|_{x=0}$ es un círculo grande en S_0 . Definamos Q_ε como la intersección de S_r y S_ε y definamos R_ε como la proyección desde $P = (0, 0, r)$ de Q_ε sobre el plano $z = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para $r > 0$, pero suficientemente cercano a 0, R está dentro del anillo acotado por las curvas R_0 y R_ε en el plano $z = 0$. En el límite, a medida que r decrece a 0, R_0 converge al círculo con centro $(0, 2\rho, 0)$ y radio 2ρ , y R_ε converge al círculo con centro en $(0, 2\rho + \varepsilon, 0)$ y radio $2\rho + \varepsilon$. Y, $\lim_{r \rightarrow 0^+} R$ debe estar en el anillo entre estos dos círculos. Como esto es verdadero

para todo $\varepsilon > 0$, también debe ser verdadero en el límite. Así $\lim_{r \rightarrow 0^+} R$ es el círculo centrado en $(0, 2\rho, 0)$ con radio 2ρ . ■

Superficie	S	κ	$\lim_{r \rightarrow 0^+} R$	Referencia
elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{y-b}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{b}{c^2}$	$x^2 + \left(y - \frac{2c^2}{b}\right) = \left(\frac{2c^2}{b}\right)^2$	[10]
cono	$x^2 + (y-a)^2 = (z-b)^2$	0	$(0, 0, 0)$	[11]
paraboloide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b}$	$\frac{b}{2c^2}$	$x^2 + \left(y - \frac{c^2}{b}\right)^2 = \left(\frac{c^2}{b}\right)^2$	[12]

Tabla 3: Aplicación del Teorema 5 a superficies fijas no esféricas. La curvatura, κ , es la curvatura de $S|_{x=0}$.

5.1 Otras Geometrías

El Teorema 5 puede ser verificado para otras curvas además de un círculo. La tabla 3 muestra los resultados para tres tipos generales de superficies. El elipsoide es una generalización natural de la esfera. Los conos estudiados han sido seleccionados porque su restricción al plano $z = 0$ tienen curvatura 0. El paraboloide extiende el caso especial de la parábola al problema tridimensional. Estos casos son complicados por el hecho de que no es práctico obtener representaciones no paramétricas explícitas para las curvas Q y R , sin embargo los límites convergen a un círculo o al punto en el origen.

5.2 Versión Libre-de-Coordenadas.

Teorema 6 Sea O un punto de la superficie S en \mathbb{R}^3 con un vector normal bien- definido, N , en O . Sea C una curva en S tal que, en O , el vector tangente unitario a C en S es T y el vector normal principal para la curva C coincide con el vector normal a S en O , esto es, N

$= \left| \frac{dT}{ds} \right|$ (donde s es longitud de arco). Para cualquier $r > 0$, definamos:

- S_r como la esfera con radio r y centro en O ,
- $P = O + rT$, como el punto en lo máximo de S_r ,
- Q como la (curva) intersección de S y S_r , y
- R como la curva, que es la proyección desde P a través de Q sobre el plano que contiene a O y que es normal a T .

Entonces, a medida que $r \rightarrow 0^+$, R converge al círculo con radio $\frac{2}{\kappa}$, centrado en $O + \frac{2}{\kappa}N$, y está en el plano con vector normal T .

Discusión de Los Límites Numéricos y Visualización.

Las descripciones geométricas de los Problemas de la Esfera y del Círculo Contráctil son visualizadas fácilmente - en nuestra memoria visual. Otro tema es crear una animación que capture exactamente el proceso del límite. En esta sección las derivaciones que condujeron al teorema 2 y 5 son revisadas nuevamente con el objetivo adicional de producir visualizaciones consistentes con la teoría general.

Uno de los autores inició su investigación del Problema Original Del Círculo Contráctil usando ClassPad Manager. Los resultados obtenidos de este análisis fueron la base para sustentar una conjetura que afirma que el límite debería ser infinito o cero. [Yang, 2006]. Kreczner reportó que el software Mathematica evalúa incorrectamente el límite cuando la curva fija es una parábola $y^2 = 2ax$ [Kreczner, 1995]. Ambos problemas podrían haberse evitado si se hubiese notado que el límite en el Problema Original Del Círculo Contráctil, tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ (Sección 2).

El punto crucial del análisis para el problema bidimensional es el Lema 1, donde C es un círculo centrado en (a,b) con radio $a^2 + b^2$. Dado que el valor límite de R muestra una discontinuidad cuando $b = 0$, cualquier pérdida de precisión al representar el centro de C podría interferir con intentos numéricos y gráficos al evaluar este límite.

En tres dimensiones, la parametrización de Q y R, introducida en la Sección 4, es muy atrayente. Pero, no es útil para completar los límites involucrados en este problema. El comportamiento especial con $\vartheta = 0$, conduce a resultados definidos como funciones por partes (discontinuas). Estas limitaciones son reales. Aparecen al intentar crear representaciones visuales exactas de la curva R utilizando un conjunto finito de puntos como muestra.

La experiencia del software *Mathematica* reportado en [Kreczner, 1995] muestra que un ataque simbólico forzado en forma bruta al problema no garantiza ser exitoso. Las herramientas simbólicas poderosas disponibles con un sistema de computación algebraico como Maple o *Mathematica* deben ser usadas con cuidado e inteligencia.

La única forma eficaz para trabajar con la curva R (y la curva Q) es poder identificar la curva geoméricamente, tal como fue hecho en la demostración del Teorema 4. Software geométrico dinámico como Cabri3D [Cabri3D], Classpad Manager [ClassPad], Sketchpad Geometra [GSketchpad], y Expresiones Geométricas [GExpressions] evitan las formas indeterminadas analíticas al trabajar directamente con objetos geométricos - círculos, rectas, intersecciones, proyecciones,....

Una colección completa de recursos simbólicos, numéricos y gráficos para investigar el Problema Del Círculo Contráctil, puede ser hallada en:

<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/> or

<http://www.radford.edu/~scorwin/eJMT/Content/Papers/v1n1p4>.

El resultado bidimensional (Lema 1) tiene ramificaciones directas para el Problema tridimensional de la Esfera Contráctil (Lema 4). Aquí el punto en cuestión es la convergencia puntual versus convergencia uniforme. Recordemos que Q es el círculo formado por la intersección de S, la esfera fija $x^2 + (y-a)^2 + z^2 = a^2$, y S_r , la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. La curva R es la proyección desde P, el punto máximo de S_r , sobre el plano $z = 0$. En la demostración del Lema 4 se mostró que R es el círculo $x^2 + (y-2a)^2 = 4a^2 - r^2$.

Las dificultades aparecen cuando la curva intersección Q es representada por una muestra discreta de puntos. El punto en la cima de Q se proyecta sobre un punto en R diametralmente opuesto al origen: $(0, 2a + \sqrt{4a^2 - r^2}, 0)$. A medida que $r \rightarrow 0^+$, este punto se aproxima a $(4a, 0, 0)$. Todos los demás puntos en R convergen al origen. Esto es, en la medida en que el límite

(uniforme) de los círculos proyectados es un círculo, el límite puntual de los círculos proyectados es uno de los dos puntos: el origen y su opuesto diametralmente, viz, $(0,0,0)$ y $(0,4a,0)$.

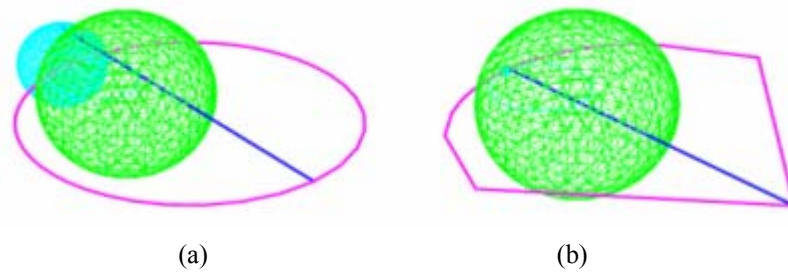


Figura 5: El Problema de La Esfera Contráctil con (a) S_1 y (b) $S_{\frac{1}{10}}$. Aun cuando las gráficas de Q están formadas con 201 puntos, la falta de convergencia uniforme es particularmente evidente en (b). (Gráficas producidas con [Maple], [13])

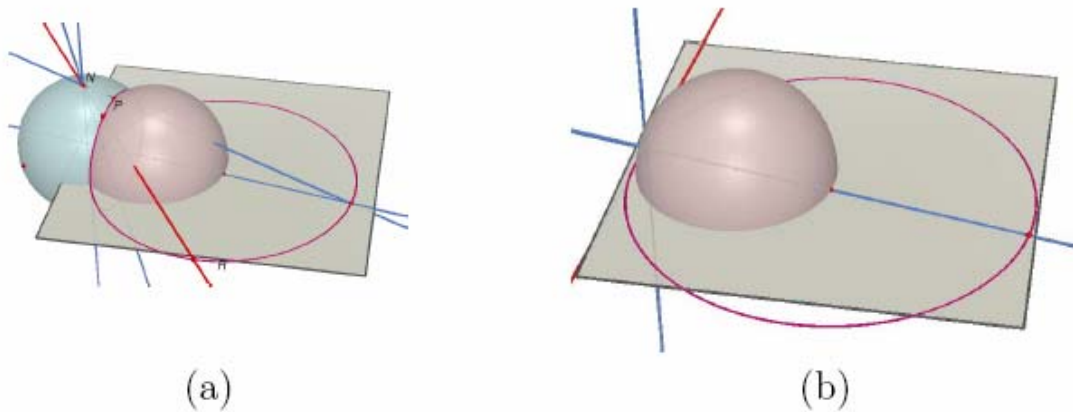


Figura 6: Problema de la Esfera Contráctil. Estas representaciones gráficas están más suavizadas, porque fueron construidas desde la geometría, no desde una muestra de puntos. (Gráficas producidas con [Cabri3D], [15].)

Cuando S no es una esfera, Q y R pudieran no ser círculos, pero R converge a un círculo (o a un punto). Si, por coincidencia, es posible proveer una descripción geométrica de Q y R , entonces existe una posibilidad de construir una animación adecuada que muestre la convergencia de R a un círculo. Si Q y R no pueden ser identificados, entonces una muestra discreta de data-puntos puede ser eficazmente utilizada para valores moderadamente grandes de r , pero no a medida que r se acerca a cero.

Las figuras 5 y 6 muestran dos fotos instantáneas de una animación creada en Maple y Cabri3D, respectivamente. En cada punto de la figura 5, la curva Q está representada por una muestra uniforme de 201 puntos. La rápida convergencia de todos los puntos (excepto uno) al origen es muy aparente. Una posibilidad es usar más puntos para representar a Q , pero no sin un costo adicional en tiempo y en cálculo. Las gráficas mostradas en la figura 6 son mejores porque fueron creadas desde la geometría del problema y no simplemente como una colección de puntos.

El software geométrico dinámico podría aparecer como la opción más apropiada de software para ser utilizado en la creación de visualizaciones eficaces en El Problema De La Esfera Contráctil. Desafortunadamente el software geométrico dinámico está recién comenzando a emplearse en la tercera dimensión y tienen poco que ofrecer al trabajar con superficies genéricas o incluso con elipsoides, conos y paraboloides.

7 Conclusión

Los Problemas Generalizados Del Círculo y La Esfera Contráctil han sido analizados, con resultados generales establecidos en términos de propiedades de un círculo osculador apropiado. Las demostraciones involucran una combinación de manipulación simbólica y geometría analítica. Los resultados han sido confirmados en otras superficies y se han proporcionado versiones libre-de-coordenadas.

Estos resultados tienen un fuerte ingrediente geométrico que llama a ser visualizado y animado. La discusión identifica algunos de los obstáculos matemáticos al obtener resultados confiables de tipo numérico generado por computador, gráfico o simbólico. En particular, se mostró cómo las formas indeterminadas pueden comprometer la confiabilidad de cálculos numéricos y cómo la ausencia de convergencia uniforme respecto a una parametrización de una curva puede conducir a resultados simbólicos y gráficos engañosos.

A pesar de que estos obstáculos han sido superados por los problemas considerados en este artículo, ellos apuntan a la necesidad de desarrollar mejores herramientas de software para la geometría dinámica tanto en dos como tres dimensiones.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores y sus colegas, incluyendo Xiao-Shan Gao, Diane Whitfield y Tom Banchoff por muchas discusiones inspiradoras.

Referencias

- [Kreczner, 1995] Kreczner, Robert, *An Interesting Problem from Calculus and Much More*, Electronic Proceedings of ICTCM 8, Addison-Wesley, Houston, 1995. <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-8/C11/pdf/paper.pdf>
- [Stewart, 2007] Stewart, James, *Essential Calculus: Early Transcendentals* Thomson Brooks/Cole, 2007.
- [Yang, 2006] Yang, W.-C., *A Shrinking Circle and A Shrinking Sphere*, Proceedings of the Eleventh Asian Technology Conference in Mathematics, 2006, ATCM, Inc., pp. 40-51, ISBN 0-9763064-3-3.

Software Packages

- [Cabri3D] Cabri 3D, a product of CABRILOG, <http://www.cabri.com/v2/pages/en/index.php>.
- [ClassPad] ClassPad Manager, a product of CASIO Computer Ltd. <http://www.classpad.org/>.
- [GExpressions] Geometry Expressions 1.0.24, a product of Saltire Software, 2006 <http://www.geometryexpressions.com/>.
- [GSketchpad] Geometer's Sketchpad v. 4, a product of Key Curriculum Press, 2006 <http://www.dynamicgeometry.com/>.
- [Maple] Maple 10.0.6, a product of Maplesoft, 2005 <http://www.maplesoft.com/>.
- [Mathematica] Mathematica, a product of Wolfram Research, Inc., <http://www.wolfram.com/>.

- [1] Jackiw, N. and Scher, D. [Geometer's Sketchpad file](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/GeoSketch/OrigSC.htm) showing the geometry of the Simple Shrinking Circle problem and visualizing the limit process, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/GeoSketch/OrigSC.htm>
- [2] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/Table1SC.html) showing the effect of the indeterminate forms on graphic, numeric, and symbolic attempts to answer the Shrinking Circle Problem, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/Table1SC.html>,
- [3] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSC.html) containing derivation and animation of the Shrinking Circle Problem when the fixed curve is a circle, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSC.html>.
- [4] Meade, D. B., [Geometer's Sketchpad file](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/GeoSketchSCproof.htm) showing the setup for the proof of Theorem 2, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/GeoSketchSCproof.htm>
- [5] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSC-ellipse.html) containing derivation and animation of the Shrinking Circle Problem when the fixed curve is an ellipse, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSC-ellipse.html>.
- [6] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSC-line.html) containing derivation and animation of the Shrinking Circle Problem when the fixed curve is a line, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSC-line.html>.
- [7] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSC-parabola.html) containing derivation and animation of the Shrinking Circle Problem when the fixed curve is a parabola, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSC-parabola.html>.
- [8] Meade, D. B., [Geometer's Sketchpad file](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/GeoSketch/ShrinkCircle_CoordFree.htm) illustrating the geometry for the coordinate-free version of the Shrinking Circle Problem, 2007,
http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/GeoSketch/ShrinkCircle_CoordFree.htm
- [9] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSS.html) containing derivation and animation of the Shrinking Sphere Problem when the fixed surface is a sphere, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSS.html>.
- [10] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSS-ellipsoid.html) containing derivation and animation of the Shrinking Sphere Problem when the fixed surface is an ellipsoid, 2007,
<http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSS-ellipsoid.html>.

- [11] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSS-cone.html) containing derivation and animation of the Shrinking Sphere Problem when the fixed surface is a cone, 2007, <http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSS-cone.html>.
- [12] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSS-paraboloid.html) containing derivation and animation of the Shrinking Sphere Problem when the fixed surface is a paraboloid, 2007, <http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/LemmaSS-paraboloid.html>.
- [13] Meade, D. B., [Maple 10 worksheet](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/DiscretePlotComp.html) showing the effect of the indeterminate forms on graphic, numeric, and symbolic attempts to answer the Shrinking Circle Problem, 2007, <http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Maple/DiscretePlotComp.html>.
- [14] Yang, W.-C., *video sequence showing a ClassPad session investigating the Shrinking Circle Problem*, 2006, <http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/ClassPad/ClassPad.html>.
- [15] Laborde, C., Laborde, J.-L., and Yang, W.-C., [Cabri3D](http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Cabri3D/cabri.camrec.html) file for visualizing the Simple Shrinking Sphere Problem, 2006, <http://www.math.sc.edu/~meade/eJMT-Shrink/demos/Cabri3D/cabri.camrec.html>.